

# Восстановление функций

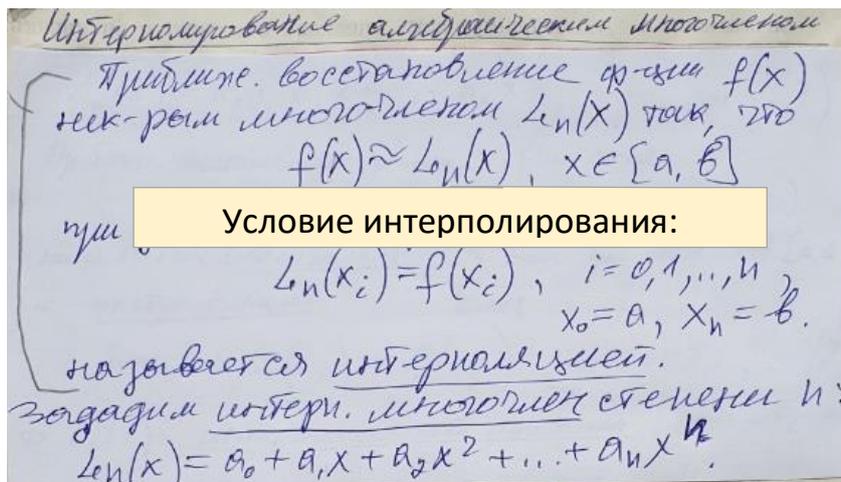
Лабораторная работа 3. Восстановить функцию и построить её график:

1. Для тех, кто программирует, сделать интерполяцию кубическими сплайнами;
2. Всем, кто программирует и не программирует, сделать интерполяцию полиномом в форме Лагранжа через **WolframAlpha** (смотрите <http://www.wolframalpha-ru.com/search?q=интерполяция>);  
(Установите расширение VPN для вашего браузера «Hola VPN для...»)
3. Всем сделать приближение (аппроксимация, регрессия) методом наименьших квадратов с помощью **WolframAlpha**. Оценить качество по коэффициенту детерминации.

Дискретно заданная функция и её восстановление. **Интерполяция**

Восстановить функцию  $f(x)$ ,  
заданную дискретно по точкам:

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f =$	0,6	2,3	2,1	3,5	4,2	6	7,8	6,2



Восстановление за пределами отрезка – **экстраполяция**.



## Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Для произвольного и некоторого многочлена:

вместо  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i =$

$= \sum_{i=0}^n c_i(x) f_i$ , *эт. интерпол. лагранжа*

где  $c_i(x) = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}$ , *коэф. лагранжа*

*иногда  $f_0, f_1$  и  $f_2$*

*удобно применять на практике*

(3)

Линейный:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f_1$$

Квадратичный:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

Плохая сходимость – пример

<http://tolstykh.com/Calculations/Interpolations/index.htm>

Плохая сходимость интерполяции по Лагранжу:

$\Rightarrow L_n(x)$  – осциллирующая кривая, кривые высоких порядков имеют осцил. коэф-р, и пересекаются

пример  $y = x^4 \Rightarrow$

Классич. пример

Интерпол. многочлен  $L_2(x)$  для  $f(x) = |x|$  на  $[-1, 1]$ :

$L_n$  – никогда не сходится при  $n \rightarrow \infty$ , кроме 3-х точек  $-1, 0, +1$ .

$\Rightarrow$  общее утверждение:

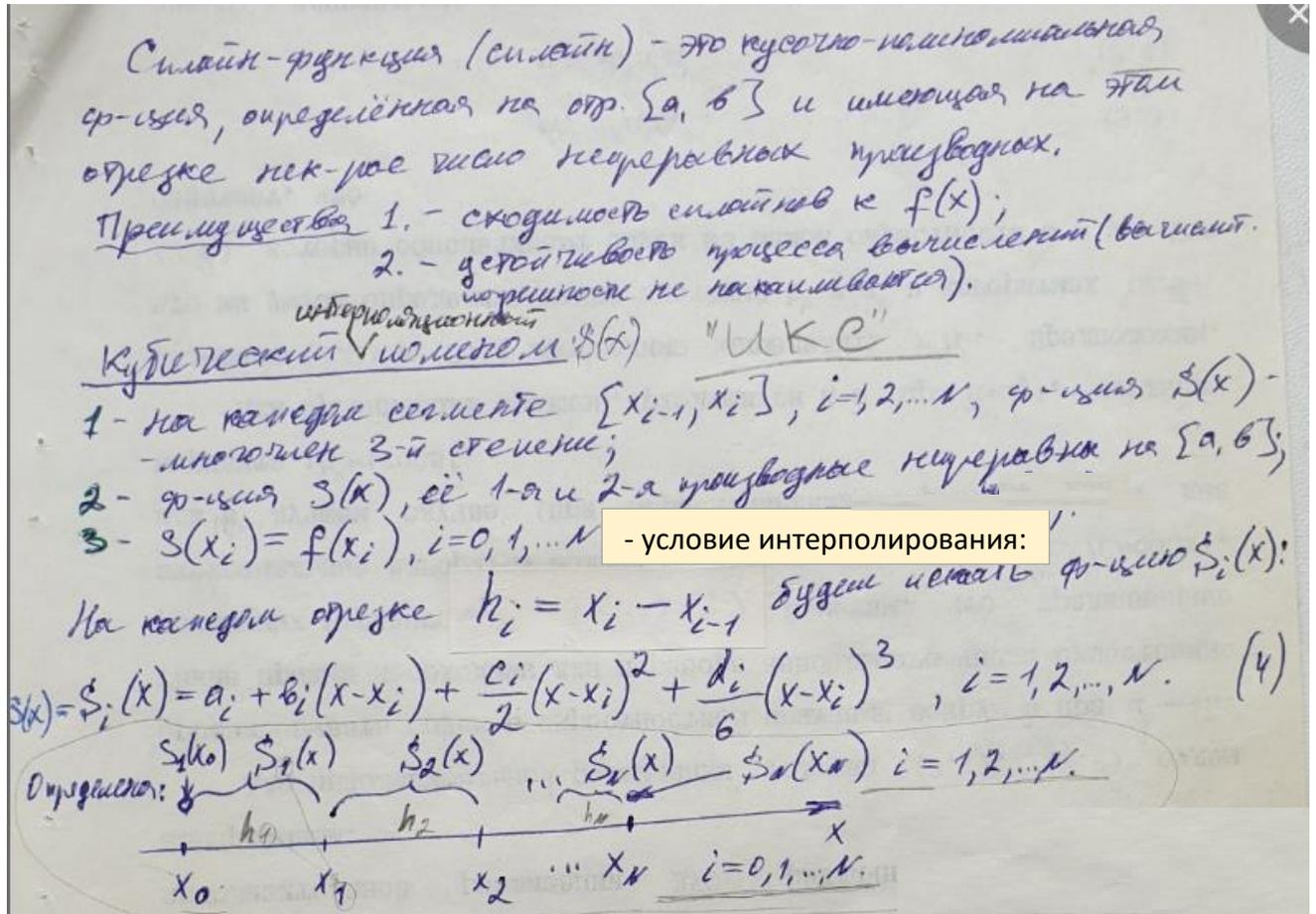
*б.1 отменно!*

*с.135*

# Интерполирование кубическими сплайнами

См. формулы <https://ru.wikipedia.org/wiki/>

разделы: Сплайн - Кубический сплайн. Интерполяция кубическим сплайном



Надо найти  $4N$  коэффициентов  $a_i, b_i, c_i, d_i$ :

из усл. интерпол.  $\Rightarrow a_i = f_i, \quad i=0, 1, 2, \dots, N$

$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$   $h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i = f_i - f_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, N.$

$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$   $c_i h_i - \frac{d_{i+1}}{2} h_{i+1}^2 = b_{i+1} - b_i$

$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$   $d_i h_i = c_i - c_{i-1}$

Сначала находим  $C$ :

$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + h_{i+1} c_{i+1} = 6 \left( \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \quad i=1, \dots, N-1.$

$c_0 = c_N = 0.$

Котыр. система (8) образует 3-х диаг. матрицу:

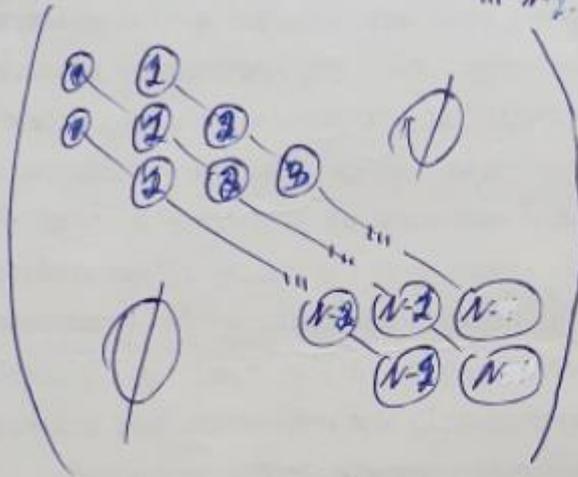
$$i=1: \dots c_0 + \dots c_1 = \dots$$

$$i=2: \dots c_0 + \dots c_1 + \dots c_2 = \dots$$

$$i=3: \dots c_1 + \dots c_2 + \dots c_3 = \dots$$

$$i=N-1: \dots c_{N-2} + \dots c_{N-1} + \dots c_N = \dots$$

$$i=N: \dots c_{N-1} + \dots c_N = \dots$$



Строки (и столбцы) такой матрица - линейно независимы  
 $\Rightarrow \det \neq 0$   
 $\Rightarrow$  система (8) имеет единств. решение.

Системы с 3-х диаг. матрицами решаются методом прогонки.

### Сходимость процесса интерполирования кубическими сплайнами

УКС

$\exists T.$  о равномер. сходимости для равном. сетки  $h_i = h = \text{const } \forall i$ .

Погрешности интерп. для  $S, S', S''$ :

$$\underline{z^{(l)}(x)} = f^{(l)}(x) - \underline{S^{(l)}(x)}, \quad l=0, 1, 2.$$

T. Для  $f \in C^4[a, b]$  справедливы оценки

$$\| z^{(l)}(x) \|_{C[a, b]} \leq M h^{4-l}, \quad 0 < M < \infty, \quad l=0, 1, 2.$$

$\Rightarrow$  при  $h \rightarrow 0$  (т.е.  $N \rightarrow \infty$ ) погрешность  $\rightarrow 0$  равномерно.

Примеры интерполяций, сделанные нашими студентами:

<https://tolstykh.com/Calculations/Interpolations/index.htm>

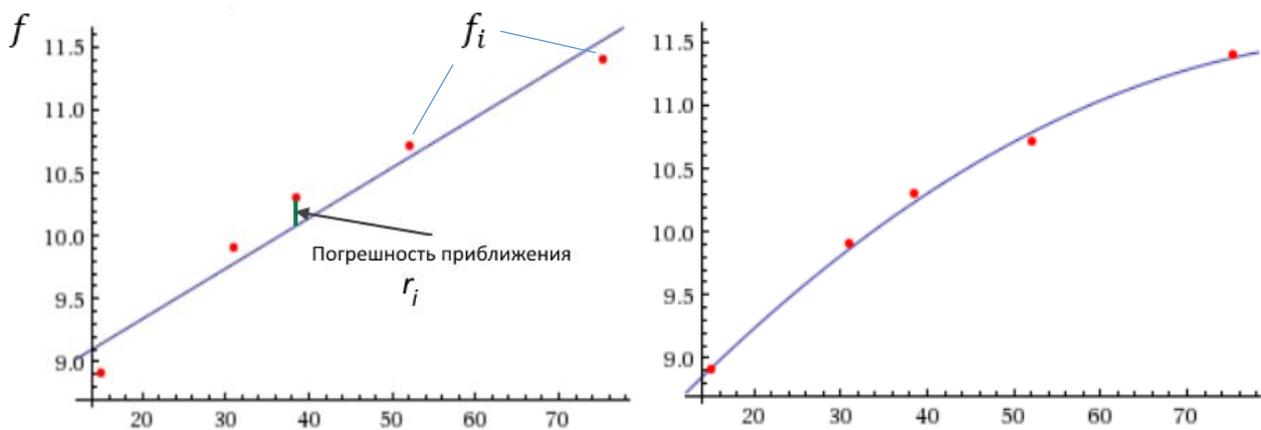
# Приближение

## (аппроксимация, регрессия) МНК

Рекомендации: аппроксимация функций в Wolfram|Alpha –  
[http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha\\_18.html](http://www.wolframalpha-ru.com/2011/10/wolframalpha_18.html)

(Установите расширение VPN для вашего браузера «Hola VPN для...»)

Когда есть погрешности, то делать интерполяцию некорректно.



**Модели функций приближения (уравнение регрессии):**

— линейная (слева), квадратичная (справа)....

$r_i$  — ошибки, остатки регрессии.

**МНК** (метод наименьших квадратов) – определение коэффициентов структуры модели из условия минимума квадратов всех погрешностей (ошибок) приближения:

$$\sum_{1}^{n} r_i^2 \rightarrow \min.$$

Качество модели определяется **Коэффициентом детерминации** — доля дисперсии функции, объясняемая рассматриваемой моделью (насколько уравнение регрессии соответствует реальным данным):

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_{tot}^2}, \quad 0 \leq R^2 \leq 1,$$

$\sigma^2 = \sum_1^n r_i^2$  — дисперсия ошибки  $r$  модели (сумма квадратов остатков регрессии),

$\sigma_{tot}^2 = \sum_1^n (f_i - \bar{f})^2$  — общая дисперсия (общая сумма квадратов) фактических значений функции,

$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_1^n f_i$  — среднее значение всех дискретно фактических значений функции.

По  $R^2$  можно сравнивать качество разных моделей восстановленной функции.

Существуют и др. оценки качества регрессивных моделей: AIC, BIC. Их используют для сравнения моделей, полученных на разном количестве измерений.

### Примеры:

Введите в строку <https://www.wolframalpha.com/>

fit {15.2,8.9},{31.1,9.7},{38.6,10.4},{52.2,10.6},{75.4,11.5} => три модели

cubic fit {{15.2, 8.9}, {31.1, 9.7}, {38.6, 10.4}, {52.2, 10.6}, {75.4, 11.5}}